おもしろ

数学

テキスト

Vol.

2

2026年度版

MathPub委員会 編集

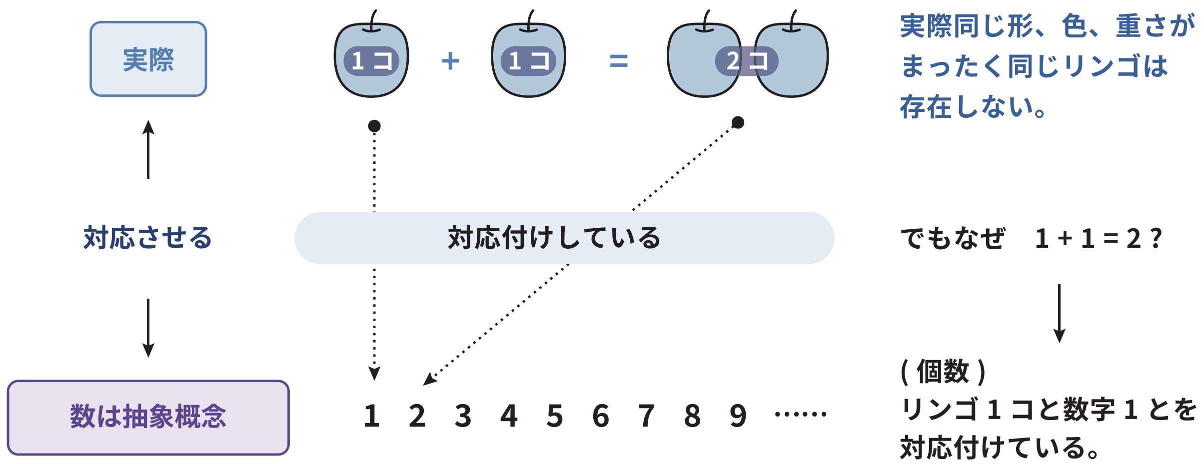
目次

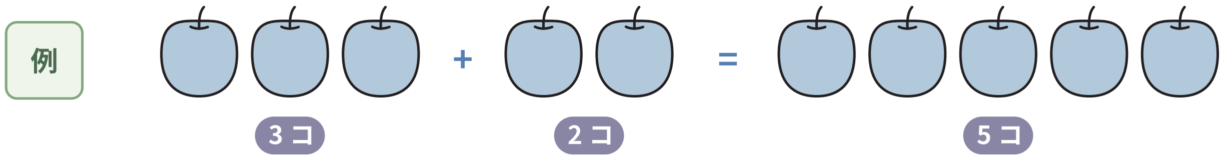
はじめに

算数・数学について、文部科学省による指導要領 [1] では次のように書かれています。

> **数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。**
>
> **⑴ 数量や図形などについての基礎的な概念や原理・法則などを理解するとともに、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする。**
>
> **⑵ 数学を活用して事象を論理的に考察する力、数量や図形などの性質を見いだし統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。**
>
> **⑶ 数学的活動の楽しさや数学のよさを実感して粘り強く考え、数学を生活や学習に生かそうとする態度、問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとする態度を養う。**

では、1, 2, 3, 4, 5, ……, 100, 101, 102, ……, 1000, 1001, 1002, ……という数とはどんな意味があるのでしょうか。これを考えてみましょう。





数だけの関係（抽象構造）　3 + 2 = 5

数	1	2	3	4	5	6	…	アラビア数字
	I	II	III	IV	V	VI	…	ローマ数字
	α’	β’	γ’	δ’	ε’	ζ’	…	ギリシャ数字
	one	two	three	four	five	six	…	英語
	一	二	三	四	五	六	…	日本語

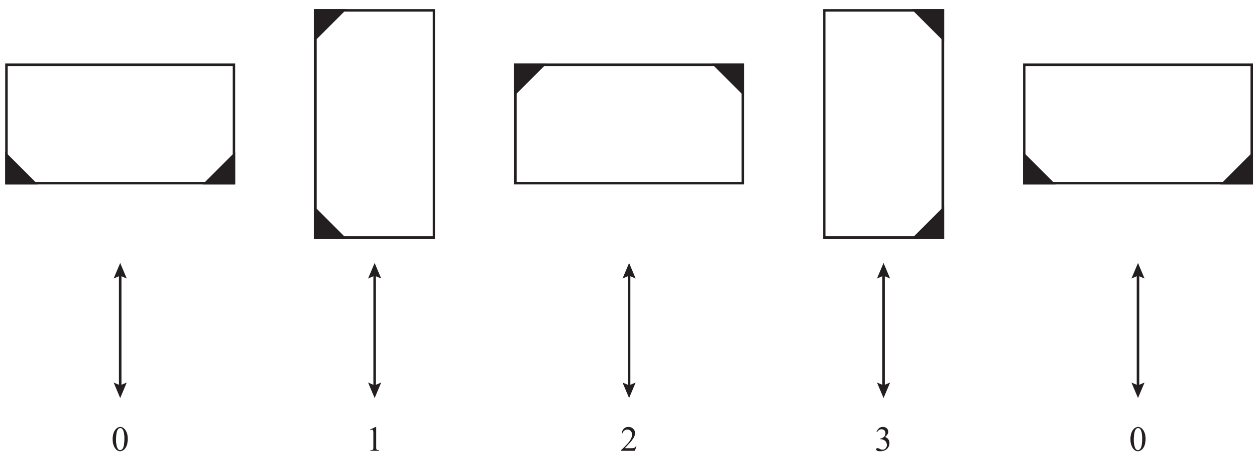
上の表のように、「数と文字」の対応付けにもいろいろな種類があります。

計算に使われるアラビア数字は、数の抽象概念を実際のアラビア数字に対応付けしたもののようです。このように考えると、数という概念もいろいろあっていいのではないでしょうか？

また、数の種類も人類の歴史とともに増えてきました。

⇒自然数（しぜんすう）、負（ふ）の数（かず）、整数（せいすう）、分数（ぶんすう）、少数（しょうすう）、有理数（ゆうりすう）、無理数（むりすう）、虚数（きょすう）、ベクトル、行列（ぎょうれつ）、位相（いそう）などです。

机の回転について、数を用いて考えてみよう。



最初の状態（じょうたい）を 0、右に 90°回転させると +1 とすると、次のように表すことができます。

はじめの状態から 90°回すと、0 + 1 = 1

そこからさらに 180°回すと、1 + 2 = 3

そこからさらに 90°回すと、もとにもどって 0 になります。

このように 90°ごとの回転の動作を 0, 1, 2, 3 の数字で表すことができます。

これが数学思考の流れです。数学の面白さはここにあります。そして論理思考は数学論理思考とも定義されています。

数学問題を解く方法を考えてみよう。

1) 絶対に確実に解く方法

確実に解く方法として、「 **総当たり法** 」があります。これは、すべての場合をとにかく全部書いてみるという方法です。力ずくですね。でも確実に回答が出てきます。

2)「 総当たり法 」から見えてくる「 **数の規則性**（きそくせい） 」から公式や解法が見えてくる。

実際に数学の問題を解く際には、その数の規則性を利用して所謂「 うまい方法 」を見つけて回答を出すことが必要となります。

しかし、多くの場合、「 うまい方法 」をいきなり教える教え方は間違いであり、子供達は数学が嫌いになってしまいます。「 総当たり法 」のいいところは、回答にいたるまでの道筋が視覚的にわかりやすいことです。つまり「 うまい方法 」を暗記することが数学の勉強と思わされるより「 うまい方法 」を導き出す「 思考の仕方 」を学ばせる方が「面白い 」と子供達、いや大人も感じるはずです。そして「 総当たり法 」→「 うまい方法 」を見える化することが「 数学的思考 」なのです。「 総当たり法 」と「 うまい方法 」の間の壁が教育の「 バカの壁 」と言えると思います。

当然、「 総当たり法 」から「 うまい方法 」へ進むのは時間がかかり、これは数学の発展の歴史になっています。おそらく物理学でも同じでしょう。

このことからも、1 年生では足し算と引き算、2 年生では掛け算、3 年生では…という数学の歴史を輪切りにした教材は、数学の歴史的発展、つまり思考の連鎖が切れた状態で子供達に教えることとなるため、子供達は記憶力だけを押し付けられて「 面白くない 」

のです。

一方、「 総当たり法 」は実学 (経験) の洗い出しなので具体的なイメージが伴い、そこから概念思考の「 うまい方法 (数の規則性)」という数学的思考力につながっていくので、「 意味のある歴史 」を学ぶように面白さを感じるのです。

教育は本来すべての分野を覆(おお)うように教える必要はなく、思考の連鎖(れんさ)を刺激(しげき)する教える教材を特定して、いくつか教えればいいのです。そこから子供達は自分の力で自学習していくのが本当の勉強になります。広く薄(うす)くではなく一部を深く掘(ほ)り下げて教えるべきなのです。学校での教育ですべてを教える時間などあるはずもないのです。詰め込み型のペーパテストの即答(そくとう)試験では能力を測(はか)ることはできず、効率よく記憶することに特化した「 思考力のない 」大人を作るだけです。

1. 奇数と偶数を並べてみよう

整数を順番に並べ、それぞれが奇数か偶数かを表すと次のようになります。

整数（せいすう）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
奇数（きすう）	○		○		○		○		○		○	
偶数（ぐうすう）		○		○		○		○		○		

それぞれの数字を 2 で割っていくと、1 ÷ 2 = 0 余り 1、2 ÷ 2 = 1 余り 0、3 ÷ 2 = 1 余り 1…となります。偶数は 2 でると余りが 0 となる数、奇数は 2 で割ると余りが 1 となる数と言うこともできます。

ここから、すべての数字を 1 と 0 だけで表す、2 進数（しんすう）という考え方があります。2 進数は次のように表されています。

10 進数	2 進数	8 の位 2 × 2 × 2	4 の位 2 × 2	2 の位 2	1 の位 1
1	1	0	0	0	1
2	10	0	0	1	0
3	11	0	0	1	1
4	100	0	1	0	0
5	101	0	1	0	1
6	110	0	1	1	0
7	111	0	1	1	1
8	1000	1	0	0	0
9	1001	1	0	0	1
10	1010	1	0	1	0

2 進数において、すべての桁が 1 で満たされたとき、位が上がります。また、位が上がるときは表のように 2 の倍数の数字であることがわかると思います。このことから、2 進数では、それぞれの位を 2 の位、4 の位、8 の位 ...... と呼びます。

10 で割ると余りは 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 にされる。

10 進数

日本では主に 10 進数が使われていますが、コンピュータの中では 2 進数が使われています。

チャレンジ！2 進数

次の 2 進数の数を 10 進数の数で表しなさい。

(1) 1010

(2) 11010

また、次の 10 進数の数を 2 進数で表しなさい。

(3) 8

(4) 25

2. 正負の数

2.1 自然数

物を数えるときに、1 個、2 個、3 個…と数えると思います。このように、日常生活で使う 0 より大きい整数 (1, 2, 3, …) を、**自然数**と呼びます。

2.2 正の数

$+1$ や $+2.7$、$+\frac{7}{12}$ などの、0 より大きい数を、**正の数**といいます。

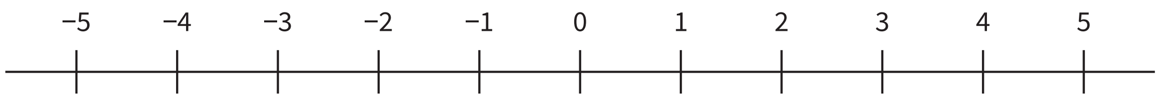
正の数は普通、$+$ をつけずに 1 や 2.7 、$\frac{7}{12}$ などのように表します。

2.3 負の数

0 より小さい数のことを、負の数といいます。

負の数は、$-$ (マイナス) をつけて -1 や -2.7 、$-\frac{7}{12}$ のように表します。

2.4 絶対値



上のように、直線状に数を対応させて表すとき、この直線を数直線といいます。数直線において、0 の点を原点といいます。

この図で表されるように、原点から 1 までの距離と、原点から -1 までの距離は等しいです。このような原点からの距離を**絶対値**といい、$|1|$ のように、距離の両側を $|\ |$ で囲って表します。

例えば、7 の絶対値は $|7| = 7$ であり、-5 の絶対値は $|-5| = 5$ です。

2.5 負の数の計算

負の数も、正の数のように足し算引き算掛け算割り算ができます。

足し算

負の数を足すとき、$2+(-5)=2-5=-3$ のように符号が逆転し引き算になります。

引き算

負の数を引くとき、$2-(-5)=2+5=7$ のように符号が逆転し足し算となります。

掛け算

負の数の掛け算には、以下のような決まりがあります。

正の数×負の数＝負の数　$2\times(-5)=-(2\times5)=-10$

負の数×正の数＝負の数　$(-2)\times5=-(2\times5)=-10$

負の数×負の数＝正の数　$(-2)\times(-5)=+(2\times5)=+10=10$

割り算

負の数の割り算には、以下のような決まりがあります。

正の数÷負の数＝負の数　$2\div(-5)=-(2\div5)=-0.4$

負の数÷正の数＝負の数　$(-2)\div5=-(2\div5)=-0.4$

負の数÷負の数＝正の数　$(-2)\div(-5)=+(2\div5)=+0.4=0.4$

掛け算と割り算では、式の中で”掛ける”もしくは”割る”負の数が奇数個なら負の数に、偶数個なら正の数になります。

チャレンジ！正負の数の計算

次の計算をしなさい

(1) $7-(-3)$

(2) $5\times(-4)$

(3) $4\times(-6)\div(-3)$

3. 掛け算と割り算の発展

3.1 べき乗

2×2 や $7 \times 7 \times 7 \times 7$ などのように、同じ数字を複数回かけるときに、数字の右肩にかける回数を表記し、2^2 や 7^4 と表わします。7^4 は、1 に 7 を 4 回かけるということを表しており、「7 の 4 乗 」と呼びます。また、7^0 は、1 に 7 を 0 回掛ける→1 に何も掛けないということなので、$7^0 = 1$ となります。どのような数字であっても、0 乗は 1 になります。

正の数は何乗しても正の数になります。

負の数は負の計算の通り、奇数乗すると負の数に偶数乗すると正の数になります。

3.2 の余り

プログラムでは、○ mod □と書くと、○□の余りを表します。また、mod の代わりに % を使うこともあり、○ % □のように表します。

これを表にまとめると、次のようになります。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	使う数字
2×□ 2×□+1	$2 \times 0 + 1$	2×1	$2 \times 1 + 1$	2×2	$2 \times 2 + 1$	2×3	$2 \times 3 + 1$	2×4	$2 \times 4 + 1$	
÷2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0～1
3×□ 3×□+1	$3 \times 0 + 1$	$3 \times 0 + 2$	3×1	$3 \times 1 + 1$	$3 \times 1 + 2$	3×2	$3 \times 2 + 1$	$3 \times 2 + 2$	3×3	
÷3	1	2	0	1	2	0	1	2	0	0～2
4×□ 4×□+1	$4 \times 0 + 1$	$4 \times 0 + 2$	$4 \times 0 + 3$	4×1	$4 \times 1 + 1$	$4 \times 1 + 2$	$4 \times 1 + 3$	4×2	$4 \times 2 + 1$	
÷4	1	2	3	0	1	2	3	0	1	0～3
5×□ 5×□+1	$5 \times 0 + 1$	$5 \times 0 + 2$	$5 \times 0 + 3$	$5 \times 0 + 4$	5×1	$5 \times 1 + 1$	$5 \times 1 + 2$	$5 \times 1 + 3$	$5 \times 1 + 4$	
÷5	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0～4
⋮										⋮
÷10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0～9

3.3 逆数

　ある数字に対して、かけると 1 になる数をその数の**逆数**といいます。

　例えば、2 に対する 0.5 や $\frac{1}{7}$ に対する 7 などが逆数です。

　また、2.1 のべき乗の表し方をすると、7 の逆数 1/7 は、7^(－1) と表します。これを図で表すと、次のようになります。

$$7^{-2}=\frac{1}{49} \underset{\div 7}{\overset{\times 7}{\rightleftarrows}} 7^{-1}=\frac{1}{7} \underset{\div 7}{\overset{\times 7}{\rightleftarrows}} 7^{0}=1 \underset{\div 7}{\overset{\times 7}{\rightleftarrows}} 7^{1}=7 \underset{\div 7}{\overset{\times 7}{\rightleftarrows}} 7^{2}=49$$

　上の図を見てわかるように、肩の数が 1 増えるたびに、7 倍ずつされていきます。つまり、肩の数字が 1 減ると、÷ 7 されていることがわかります。このことより、右肩の数字が 0 より 1 小さい -1 の時は、$1 \div 7 = \frac{1}{7}$ になります。

チャレンジ！べき数・逆数

次の計算をしなさい。

(1)　2^3

(2)　10^{-1}

(3)　1^{-1}

4. 素数

素数（そすう）とは、1 より大きい整数のうち、1 とその数以外で割り切ることができない数のことです。

1 ～ 100 の数字だと、

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

の 25 個が素数です。

また、ある数字を素数の掛（か）け算で表すことを、素因数分解（そいんすうぶんかい）といいます。

20 までの数字で素数ではないものを素因数分解してみると、

$4 = 2 \times 2$　　$6 = 2 \times 3$　　$8 = 2 \times 2 \times 2$　　$10 = 2 \times 5$　　$12 = 2 \times 2 \times 3$

$14 = 2 \times 7$　　$15 = 3 \times 7$　　$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$　　$18 = 2 \times 3 \times 3$　　$20 = 2 \times 2 \times 5$

となります。このくらいの大きさの数字であれば簡単（かんたん）に素因数分解できますが、数が大きくなると面倒（めんどう）です。そこで、すだれ算を用います。

$$\begin{array}{r|l} 2 & \underline{\ 90\ } \\ 3 & \underline{\ 45\ } \\ 3 & \underline{\ 15\ } \\ & \ \ 5 \end{array}$$

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$\begin{array}{r|r} 2 & \underline{\ 168} \\ 2 & \underline{\ 84} \\ 2 & \underline{\ 42} \\ 3 & \underline{\ 21} \\ & 7 \end{array}$$

$$168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^3 \times 3 \times 7$$

上のように、(素数))(割られる数)で割れなくなるまで計算していく方法がすだれ算です。

やくすう
約数

ある数を割り切ることのできる整数をその数の**約数**といいます。

例えば、6 の約数は 1 と 2 と 3 と 6 となります。

約数は、素因数の組み合わせの数だけあります。

倍数

ある数を整数倍したものをその数の**倍数**といいます。

例えば、4 は 2 を 2 倍した倍数です。

最大公約数

二つの数のそれぞれに共通する約数の中で、最も大きいもの。

例えば、90 と 168 の最大公約数は、$2 \times 3 = 6$ で 6 です。

最小公倍数

二つの数のそれぞれに共通する倍数の中で、最も小さいもの。

例えば、90 と 168 の最小公倍数は、$(2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7) \times (3 \times 5) = 2520$ です。

分数の約分は、分子と分母を素因数分解すればわかりやすいです。

$$\frac{4}{24} = \frac{\color{red}{2 \times 2}}{\color{red}{2 \times 2} \times 2 \times 3} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

上のような例だと、赤文字の部分で割ることができます。つまり、約分とは、分母と分子を最大公約数で割るということになります。

チャレンジ！　最大公約数と最小公倍数

次のそれぞれの 2 つの数について、最大公約数と最小公倍数を求めなさい。

(1) 60 と 75

(2) 98 と 231

5. 数の広がり

1, 2, 3, 4, 5, ……, 100, 101, 102, ……, 1000, 1001, 1002, ……

のように数える為の数を自然数と言います。買い物に行き、いくら払って、いくらお釣りをもらうというときに自然数を使うように、自然数は計算ができます。

＋－×÷ (足し算、引き算、掛け算、割り算) の 4 つです。

自然数 (正の数) に負の数を新しく作る。

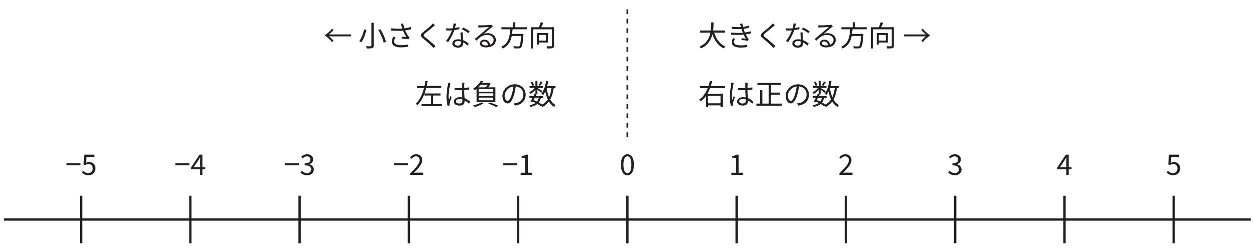
7 ＋△＝ 4 の計算があった時、△にどのような数字を入れると、足し算の答えを 7 より小さい 4 にすることができるでしょうか？自然数だと見つかりません。そのため、仕方なく□に引き算の記号 － (マイナス) を使った 0 よりも 3 だけ小さい -3 という数を考えないといけません。

そして 0 より大きい数を「 正の数 」とし、マイナスをつけた 0 より小さい数字を「 負の数 」とします。負の数も、

−1, −2, −3, −4, −5, ……, −100, −101, −102, ……, −1000, −1001, −1002, ……

と正の数と同じように沢山出てきます。

負の整数と正の整数を図に書いてみると、



となります。このような図を数直線といいます。

マイナスも自然界にあると言えます。例えば 3 歩進むことを「 前に 3 歩進む 」と表現するならば、「 後ろに 3 歩下がる 」を「 前に− 3 歩進む 」というふうにマイナスを使うことによって、全て「 前に進む 」で表現できます。「 後ろに下がる 」を「 前にマイナスに

進む」と言い換えることができるので、マイナスは具体的に存在すると言えます。

例えば、距離を求める際に、大きい数から小さな数を引いて計算するというルールを作ると、6 と 3 の間の距離は $6-3=3$ で距離 3 になります。

6 と−3 の間の距離を計算してみると $6-(-3)=6+(-1)\times(-3)=6+3=9$ (マイナス同士の掛け算は＋というルール) という計算になって、距離は 9 になります。数直線をみるとそうなっていることがわかります。

さらに数の広がり (小数と分数 (有理数＝分数で表せる)、無理数、超自然数 …)

小数 → 分数 → 循環小数

物差しで 1mm 間隔のメモリしかないときに、図りたいものの長さがメモリとメモリの間の場合は、メモリの間を大体で見ないといけません。その時に大体 0.2, 0.5(半分) と**小数**で表すと便利です。

$\dfrac{1}{3}=0.333333\cdots,\ \dfrac{2}{11}=0.181818\cdots$ のように、同じ数字の並びが繰り返される少数を**循環小数**といいます。循環小数は、循環することを表すため、繰り返される数字の始めと終わりの上に点を打って表します。例えば、$\dfrac{1}{7}=0.142857142857\cdots$ (142857 で循環) は、$\dfrac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}\cdots$ と表します。

循環小数は必ず分数に直すことができます。

$$\begin{array}{rr} 10\times\bigcirc & =3.333333\cdots \\ -)\qquad\quad \bigcirc & =0.333333\cdots \\ \hline 9\times & =3.000000\cdots \end{array}$$

$$\text{両辺を } 9 \text{ で割る} \rightarrow \bigcirc=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

では、0.181818… や 0.123123… はどうすればよいでしょうか？

無理数 ($\sqrt{2}$ etc… : 分数で表すことが無理な数)

無理数とは、分数で表すことが不可能な数のことです。

分数を循環小数で表すことは可能ですが、無理数は循環小数にはなりません。つまり、

分数では表せません。循環せずに無限に続くので分数にはできません。

超自然数 (π (パイ) や e (ネイピア数))

超自然数とは、無理数のうち、根にならないもの。

π や e は自然界に不思議な常数として実在する大切な数です。

ここまでは自然界に存在する数とも言えます。

虚数 (i)

虚数とは、2 乗すると −1 になる数のことです。

2 乗すると普通は正の数になりますが、2 乗すると負の数になる数が簡単な 2 次式では必要になります。例えば $x^2 + 3 = 0$ という 2 次方程式を解く問題では、式を変形すると $x^2 = -3$ となり、x は 2 乗してマイナスになる数字である必要があります。このような問題を解くため、$\sqrt{-1} = i$ と表される i という数が追加されました。i は二乗すると −1 になる不思議な数です。

いわゆる数の拡張です。分数や無理数、超自然数は自然の中に実在しますが、虚数は自然界には実在していないのです。そのため、虚数と名づけられました。

チャレンジ！小数と分数

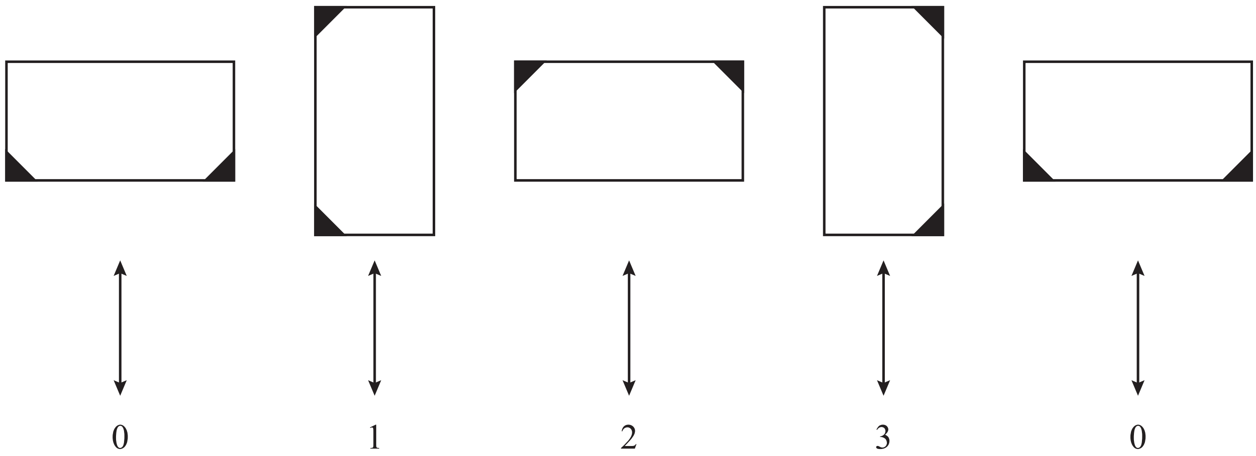
次の小数を分数に、分数を小数にしなさい。

(1) $0.\dot{1}2\dot{3}$

(2) $\frac{1}{11}$

6. 身近な「 進数 」

1 章では、2 進数と 10 進数について紹介しました。この章では、それ以外の進数と、その意味について説明します。



“はじめに” でも示した、長方形が右周りに回転していく図について考えます。最初の状態を 0、そこから 90°回転させると +1 とすると、0 から 3 まで進んだあと、360 度回転して元の向き (0) に戻ります。このように 0 ~ 3 の 4 つの数字で長方形の向きを表せるとお話ししました。

しかし、このままでは 1 回転した状態が「0」で表されているので、何回転しているかはわかりません。そこで、一周したときは 10 と表記するようにします。つまり、

はじめの状態から 90°回すと、 $\mathbf{0+1=1}$

そこからさらに 180°回すと、 $\mathbf{1+2=3}$

そこからさらに 90°回す (合計 360°回す) と、 $\mathbf{3+1=1}$

さらに 480° (一回転半) 回すと、 $\mathbf{10+12=22}$

となります。

ここで、3 周と 270°回転したら 33 になり、二けたを使い切ってしまいます。ですので、4 回転すると、位が一つ上がって 100 となります。

この表し方は、0 と 1 の 2 つの数字で表すと 2 進法、0 ~ 9 の 10 この数字で表すと 10

進法という呼び方をしたように、0 ~ 3 の 4 つの数字で様々な数を表せるため、4 進法といいます。

今回は 4 進数を例に挙げましたが、ほかにもいろいろな進数があります。

次のページの表は、様々な進数についてまとめたものです。

この表を見ると、n 進数のそれぞれのけたは、n のべき乗になっていることがわかります。

		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	
0～9の数 10進数											1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	← 10のかたまり
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
0～5の数 6進数							1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	← 6のかたまり
	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	
0と1の数 2進数																	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	← 16のかたまり
									1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	← 8のかたまり
					1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	← 4のかたまり
			1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	← 2のかたまり
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	← 1のかたまり
時　計 12進数													1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	← 半日のかたまり		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	← 時間のかたまり		

チャレンジ！進数

身近にある進数で表されるものを考えてみましょう。

7. つるかめ算

7.1 つるかめ算の解き方

つるとかめが合わせて 12 匹います。つるとかめの足の数は合計で 36 本です。

では、つるとかめはそれぞれ何匹ずついるでしょうか？

上記のようにつるとかめの頭数と足の数の合計だけがわかっているときに、つるとかめのそれぞれの頭数を求める問題を、つるかめ算といいます。この問題を実際に解いてみましょう。

解き方

1) 総当たり法

かめの足の本数は 4 本であるから、全部かめなら $36 \div 4 = 9$ なので 9 匹。つまり、かめは 9 匹より少ないことになります。

ここで、かめの数が 0 匹から 9 匹となるまでのつるとかめのそれぞれの数と足の数の合計を表とグラフにまとめてみましょう。

表 7.1 つるとかめの足の本数

かめの数 (匹)	つるの数 (匹)	足の本数の合計 (本)
0	12	$4 \times 0 + 2 \times 12 = 24$
1	11	$4 \times 1 + 2 \times 11 = 26$
2	10	$4 \times 2 + 2 \times 10 = 28$
3	9	$4 \times 3 + 2 \times 9 = 30$
4	8	$4 \times 4 + 2 \times 8 = 32$
5	7	$4 \times 5 + 2 \times 7 = 34$
6	6	$4 \times 6 + 2 \times 6 = 36$
7	5	$4 \times 7 + 2 \times 5 = 38$
8	4	$4 \times 8 + 2 \times 4 = 40$
9	3	$4 \times 9 + 2 \times 3 = 42$

表 7.2 つるとかめの数と足の本数の関係

かめ つる	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
1	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38
2	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
3	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
5	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46
6	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
7	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50
8	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
9	18	22	26	30	34	38	42	46	50	54
10	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
11	22	26	30	34	38	42	46	50	54	58
12	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60

つるとかめの合計が 12 匹であるのは赤枠で囲っている部分であり、太い赤枠は足の本数が 36 本の時のつるとかめの合計が 12 匹であることを表しています。

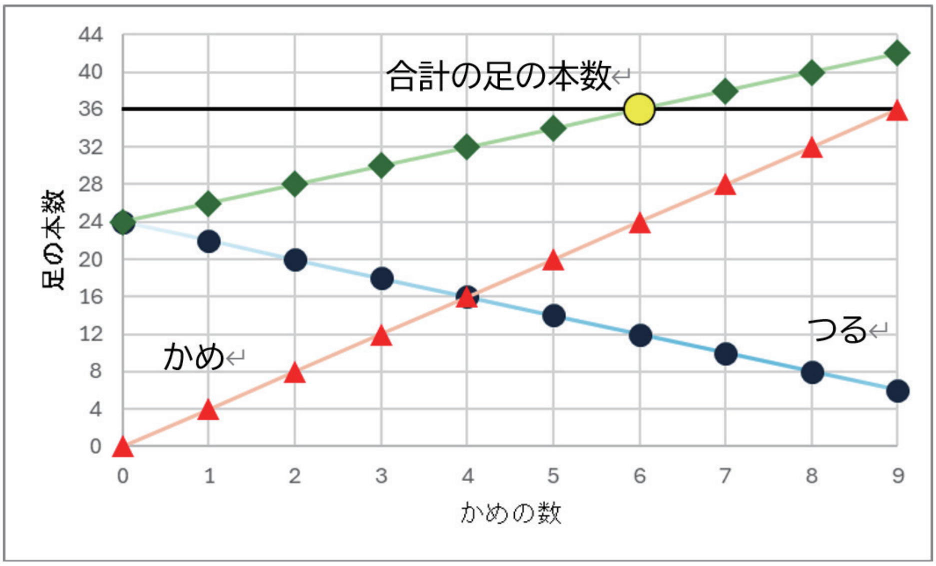


図 7.1 つるとかめの数と足の本数

かめの数と、その時のつるとかめのそれぞれの足の本数と合計の足の本数を表したグラフです。◇の線と足の数が 36 本の線との交点を見ると、かめの数は 6 匹であることがわかります。

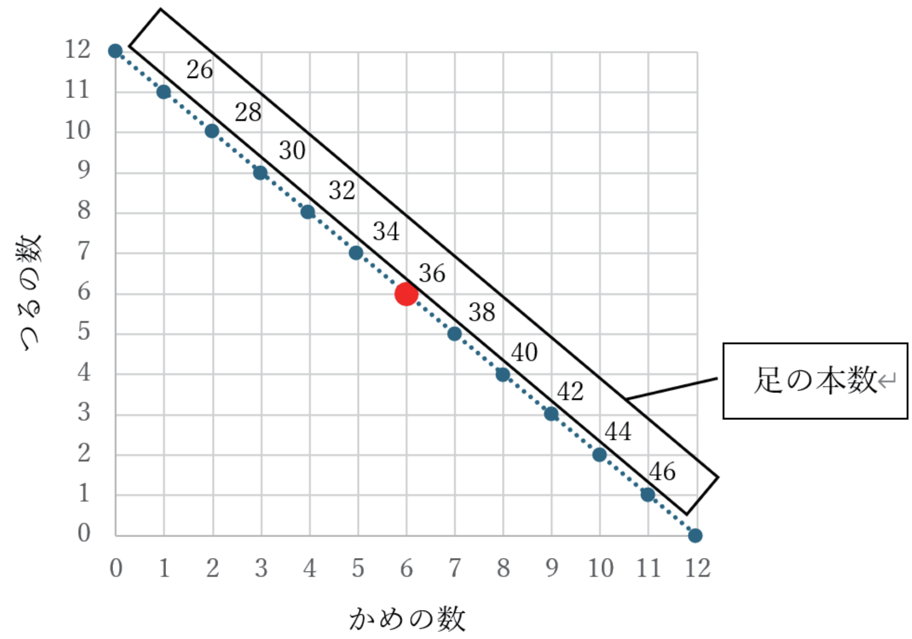


図 7.2 つるとかめの合計数と足の本数

つるの数とかめの数が合計 12 匹の時の足の本数を表したグラフです。

合計の本数が 36 本の点を見ると、つるとかめがどちらも 6 匹ずつであることがわかります。

上の表とグラフを見ると、足の本数の合計が 36 本になるのは、つるが 6 匹でかめも 6 匹の時であることがわかります。

このようにすべてを書き出す総当たり法を使えば、たくさん書かなければいけない代わりに簡単に解くことができます。

しかし、つるとかめの合計が 100 匹や 1000 匹になると表を書くのが大変です。

2) 総当たり方から数字の関係のルールを見つける

表 7.1 をよく見ると、かめが 1 匹えると、足の本数の合計が 2 増えていることがわかります。もしも全部がつるだとすると、足の本数の合計は

$$12 \times 2 = 24\,(\text{本})$$

になるので、36 本には

$$36 - 24 = 12\,(\text{本})$$

だけ足りないことになります。

つるの数を 1 匹減らし、かめの数を 1 匹増やすと、足の本数の合計が 2 本増えるので、12 本増やすには、

$$12 \div 2 = 6\,(\text{本})$$

つまり、足の本数の合計が 36 本になるためには、かめが 6 匹である必要があります。

かめが 6 匹なら、つるは $12 - 6 = 6\,(\text{匹})$ になります。

この考え方だと、表を書かずに計算だけでつるとかめの数がわかるので、つるとかめの合計が 100 匹や 1000 匹になっても答えを出すことができますね！

3) 式をわかりやすく書く

◯をつるの数、△をかめの数として、式を書くと、①から③の式になります。

$$\bigcirc + \triangle = 12 \qquad ①$$

$$\bigcirc = 12 - \triangle \qquad ②$$

$$2 \times \bigcirc + 4 \times \triangle = 36 \qquad ③$$

ここで、②の◯を③の◯に入れてみる。

$$2 \times (12 - \triangle) + 4 \times \triangle = 36 \qquad ④$$

この式の形を変えると、

$$2 \times 12 - 2 \times \triangle + 4 \times \triangle = 36$$

$$24 - 2 \times \triangle + 4 \times \triangle = 36$$

ここで、$-2 \times \triangle + 4 \times \triangle$ を、「$\times \triangle$」でくくると、$(-2 + 4) \times \triangle$ となります。

$$24 + (-2 + 4) \times \triangle = 36$$

$$24 + 2 \times \triangle = 36$$

ここで、両辺から 24 を引くことで、左辺を $2 \times \triangle$ だけにします。

$$24 + 2 \times \triangle - 24 = 36 - 24$$

$$2 \times \triangle = 12$$

ここで、両辺を 2 で割ることで、左辺を△だけにします。

$$2 \times \triangle \div 2 = 12 \div 2$$

$$\triangle = 6$$

よって、△＝6 となり、式②に △＝6 を入れると、

$$\bigcirc = 12 - \triangle$$

$$= 12 - 6$$

$$= 6$$

よって、つるは 6 匹、かめも 6 匹になります。

このような考え方は、中学校で習う連立方程式（れんりつほうていしき）と呼びます

7.2 文字式　〜○△からへ〜

上の式では、はじめつるを○匹、かめを△匹として計算しました。このように、数字の代わりに別のものを使う考え方を代数といいます。

しかし、式の途中（とちゅう）で何度も○や△を書くのはわかりづらくありませんか？そこで、数学では、○や△の代わりに x や y といった文字を使います。例えば、先ほど解いた問題の①と③の式を、つるを x 匹、かめを y 匹に置き換えて書くと、次のような式になります。

$$x + y = 12$$ ①'

$$2x + 4y = 36$$ ③'

このような文字を使った式のことを、文字式といいます。

また、この式のように二種類の文字を二つの式を用いて解くようなものを二元連立方程式といいます。

文字式にはいくつかルールがあります。この内容は読み飛ばしても大丈夫ですので、難しいと感じた方は 7.3 に進んでください。

・掛け算の表記はを省略して書きます。また、原則文字よりも数字を先に書きます。

例　$4 \times x = 4x$　　$a \times b = ab$　　$(a + b) \times 5c = 5c(a + b)$

・同じ文字を掛け合わせるときは、$a \times a = aa$ ではなく、a^2 のように同じ文字をかけた回数を文字の右上に小さく書きます。

例　$a \times a \times a = a^3$　　$a \times b \times 7 \times b \times a \times b = 7a^2b^3$

なお、a^2や b^3 を累乗(るいじょう)のといい、この右肩(みぎかた)の数字を累乗の指数(しすう)といいます。

・割り算の場合は、÷ を使わず分数で表します。

例　$\mathrm{a} \div 7 = \dfrac{\mathrm{a}}{7}$　　$\left(2\mathrm{a}\right) \div \left(5\mathrm{b}\right) = \dfrac{2\mathrm{a}}{5\mathrm{b}}$

中学以降(いこう)の「 数学 」では、文字を使って問題を解くことが多くなります。今のうちに慣れておきましょう。

7.3 (大学生範囲) 文字式　行列とベクトル演算へ

今回のつるかめ算の問題を、7.2 で示したように 2 元連立方程式で表すと、

$$x + y = 12 \quad ①$$

$$2x + 4y = 36 \quad ②$$

となります。

これを「 行列 」を用いて計算してみましょう。

行列とは、( ) の中に長方形に数字時を並べたもので、実際に①と②を行列で表すと次のようになります。

$$\begin{pmatrix} x + y = 12 \\ 2x + 4y = 36 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix} \quad ③$$

左の ( ) の中には連立方程式の左辺のそれぞれの係数が、右辺の ( ) の中には連立方程式の右辺がそれぞれ入っています。

行列の計算方法は、次のようになります。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \times b_1 + a_{12} \times b_1 \\ a_{22} \times b_1 + a_{22} \times b_2 \end{pmatrix}$$

つまり、③を、途中式を含めて書くと、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times x + 1 \times y \\ 4 \times x + 2 \times y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 4x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix}$$

となり、もとの連立方程式と同じことを表していることがわかります。

ここで、行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A$ とすると、$B \times A = 1$ となる行列が存在すれば、それを両辺にかけることで、

$$(B) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (B) \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix} \quad ④$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (B) \begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix}$$

となり、x と y がそれぞれ求まります。

この行列 B を、A の逆行列といい、A^{-1} と表します。

行列 $C=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると C の逆行列 C^{-1} は $C^{-1}=\frac{1}{a\times d-b\times c}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ です。

よって、$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ なので、

$$A^{-1}=\frac{1}{1\times 2-1\times 4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となります。

これを④式のに代入すると、

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix}$$

ここで、$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列であり、$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=1$ なので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\times 12+\frac{1}{2}\times 36 \\ 2\times 12-\frac{1}{2}\times 36 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -12+18 \\ 24-18 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

となり、$x=6,\ y=6$ となります。

このように、行列を用いて連立方程式を解くことができます。

この「行列」について、もっと詳しく知りたい方は、以下をお読みください。

難しいと感じ方はチャレンジ！に進んでください。

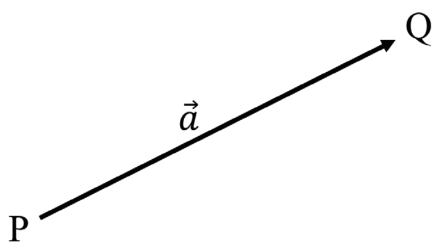
ex 1) スカラーとベクトル (数学 C ベクトル [1])

大きさ　　　　　：スカラー　(ex. 長さ、温度、時間)

大きさと向き　　：ベクトル　(ex. 速度、加速度、力)

ベクトルを一つの文字で表すときは、$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ …のように文字の上に矢印を書くか、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$,…のように太字を用います。

また、始点と終点がおなじ、つまり大きさが 0 で向きは考えないベクトルのことを、零ベクトルといいます。



ex 2) 線形従属、線形独立 (数学 C ベクトル [1])

平面上で、$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の二つのベクトルがあるとき、そのいずれも零ベクトルではなく、平行でない場合、二つのベクトルは**線形独立**、または **1 次独立**であると言います。また、$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ が線形独立でないときは、$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ は**線形従属**または **1 次従属**であると言います。

ex 3) 外積と内積 (数学 C ベクトル [1])

はじめ、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の積が考えられたとき、その大きさは、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ で定まる平行四辺形の面積とされた。これを幾何学積 (= 外積) という。(物理的な意味を書く)

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ とのなす角を θ とすると、外積の大きさは

$$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\, sin\ \theta$$

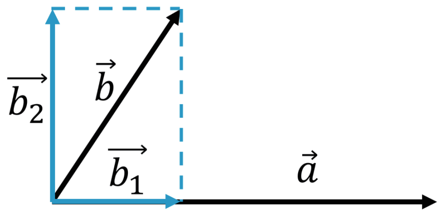
となります。

外積に続いて生み出された線形積 (= 内積) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ の大きさは

$$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\,cos\,\theta$$

となります。

ベクトル $\overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{a}$ に平行な $\overrightarrow{b_1}$ と、$\overrightarrow{a}$ に垂直な $\overrightarrow{b_2}$ に分解するとき、外積は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b_2}$ の、内積は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b_1}$ の積である。



ex. 4. 行列 (数学 C 数学的な表現の工夫 [1] 行列入門 1.1[2])

行列とは、次の式のように数を長方形に並べたものです。それぞれの数をその行列の成分といいます。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

通常、行列は ( ) や [ ] でくくって表します。また、横の並びを行といい上から第 1 行、第 2 行 ... と呼び、縦の並びは列といい第 1 列、第 2 列 ... と呼びます。第行と第列の交差する成分を ( ) 成分と呼びます。行と列の数が等しいとき、それを**正方行列**と呼びます。

また、

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

のように、1 つの行からなる $1 \times n$ 行列を (n 次の) 行ベクトル、1 つの列からなる $m \times 1$ 行列を (m 次の) 列ベクトルといいます。

2 つの行列について、行の数が同じであり、列の数も同じであるとき、この 2 つの行列は同じ型であるといいます。

正方行列において、

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

のように、対角の行列の成分がすべて 1 で、それ以外の成分が 0 である行列を、単位行列といいます。ここで、n 次 ( ) の正方行列 A と、n 次の単位行列 E に対して、

$$AE = E\,,\ XA = E$$

を満たす正方行列 X があるとき、この X を A の逆行列と言います。 A の逆行列は存在すれば一つしかなく、これを A^{-1} と表すと、

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

A に逆行列が存在するとき、A は**正則**であると言います。

ここで、

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$$

とすると、

$$ad - bc \neq 0$$

の時に正則です。

> **問 4.1　次の条件を満たす行列の例を 1 つずつ作りなさい。**
> (1) 2 行 5 列の行列　　(2) 型が 4×3 の行列

> **問 4.2　次の行列が正則かどうか調べなさい。**
> (1) $\begin{pmatrix}1 & 3\\5 & 2\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{pmatrix}$

ex. 5. 行列の計算 (数学 C 数学的な表現の工夫 [1] 行列入門 1.2, 1.3[2])

同じ型の行列 A , B の対応する成分の和を成分とする行列を、A と B の和といい、$A+B$ と書きます。例えば、

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

とすると、

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$$

です。

ここで、A , B , C が同じ型の行列の時、

交換法則　　$A+B=B+A$

結合法則　　$(A+B)+C=A+(B+C)$

が成り立ちます。そのため、単に $A+B+C$ と書きます。

同様に、引き算の計算も成り立ちます。

3 次の行ベクトル $(a_1 \quad a_2 \quad a_3)$ と 3 次の列ベクトルに $\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$ 対して、それらの積は

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3)\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

となります。

また、2×2 行列 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ の積は、

$$A\times \mathrm{B}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$$

となります。

計算のやり方としては、

$$A \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

このように、A の各行と B の各列に線を引き、重ね合わせた際に線が交わるところに、行ベクトルと線ベクトルの積を当てはめると、積が求まります。

問 5　それぞれ計算しなさい。

(1) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

ex. 6. 行列式 (数学 C 数学的な表現の工夫 [1] 行列入門 1.8[2])

6. 1 行列式

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$は、前述のとおり、

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

の時に正則である。

この式の左辺を行列式といい、

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$$

のように書きます。

3×3 行列 B の場合は、

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

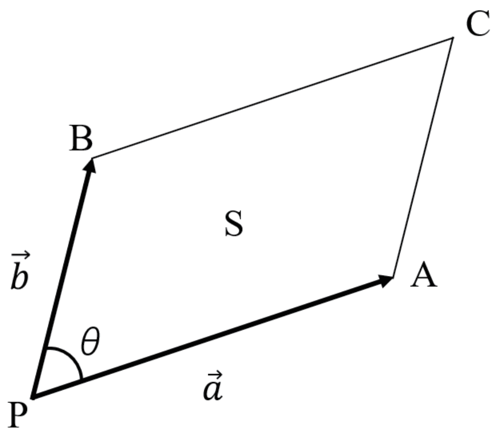
$$= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{13}b_{22}b_{31}$$

となります。

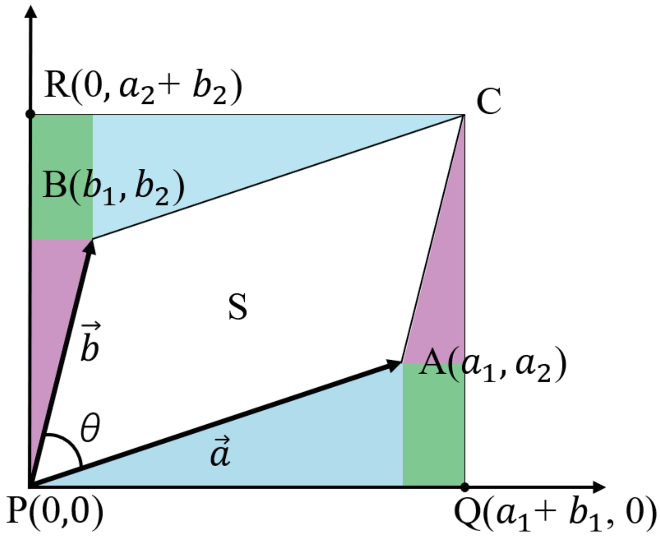
6. 2 行列式の図形的な意味

始点を点 P、終点をそれぞれ A、B とした平面上のベクトルを

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$とします。



この時、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ とし、PA と PB を隣り合う 2 辺とする平行四辺形 PACB の面積を求めます。ここで、次の図のように考えます。



ここで、長方形 PQCR から、▲ ×2 と ▲ ×2 と ■ ×2 を除くと、PACB の面積だけが残ります。つまり、

$$S = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times a_1 \times a_2\right) - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times b_1 \times b_2\right) - 2 \times (b_1 \times a_2)$$

$$= (a_1a_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + 2a_2b_1)$$

$$= a_1b_2 - a_2b_1$$

よって、

$$S = (a_1b_2 - a_2b_1)$$

となります。

ここで、行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ と平行四辺形 PACB の面積 S が等しくなっていることがわかります。

以上より、

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{\mathrm{PB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおくとき、PA と PB を隣り合う 2 辺とする平行四辺形

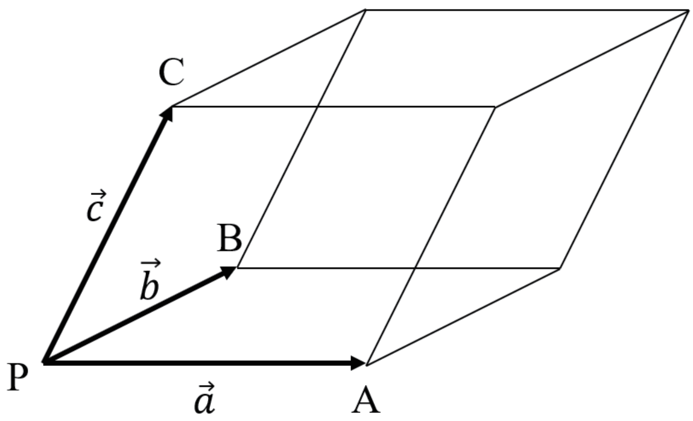
PACB の面積は、行列式 $\begin{vmatrix} \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{a}_2 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}$ に等しくなります。

また空間内のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ があり、PA , PB ,

PC を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積Vを求めると、

$$V = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

となります。



問 6　次の行列式を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} -6 & 7 & 2 \\ 9 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

ex. 7. 消去法と掃き出し法

7. 1 連立一次方程式の解

次の連立一次方程式を解く方法を考えます。

$$\begin{cases} 3x - 5y + 2z = 1 & \text{①} \\ x + y - 3z = -9 & \text{②} \\ 2x + 4y - 2z = 2 & \text{③} \end{cases} \tag{1}$$

①と②を入れ替えると、

$$\begin{cases} x + y - 3z = -9 & \text{②} \\ 3x - 5y + 2z = 1 & \text{①} \\ 2x + 4y - 2z = 2 & \text{③} \end{cases}$$

①－② $\times 3$ 、③－② $\times 2$ により、①と③から x を除去すると、

$$\begin{cases} x + y - 3z = -9 & \text{②} \\ -8y + 11z = 28 & \text{①'} \\ 2y + 4z = 20 & \text{③'} \end{cases}$$

①' と ③' を入れ替え、

$$\begin{cases} x + y - 3z = -9 & \text{②} \\ 2y + 4z = 20 & \text{③'} \\ -8y + 11z = 28 & \text{①'} \end{cases}$$

③' $\div 2$ より、

$$\begin{cases} x + y - 3z = -9 & \text{②} \\ y + 2z = 10 & \text{③''} \\ -8y + 11z = 28 & \text{①'} \end{cases}$$

①'＋③'' $\times 8$ より、

$$\begin{cases} x + y - 3z = -9 & \text{②} \\ y + z = 10 & \text{③''} \\ 27z = 108 & \text{①''} \end{cases}$$

ここで、①' より $z = 4$ 、③'' より $y = 2$ 、②より $x = 1$ が求まる。

よって、この連立一次方程式の解は $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$ となる。

この解法は、与えられた連立一次方程式に次の 3 つの操作を繰り返し行うことで連立方程式を変形し、簡単に解が求まるようにしたものである。

(1) 1 つの方程式に 0 でない数を掛ける

(2) 1 つの方程式に他の方程式をかけたものを足したり引いたりする

(3) 2 つの方程式を入れ替える

このような解法を**ガウスの消去法** (または単に**消去法**) という。

この解法を用いる際は、方程式の係数と右辺のみに注目しています。このことより、以下の行列が得られます。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right) \tag{2}$$

ここで、連立方程式の左辺の係数からなる行列 A 、右辺をベクトル $\overrightarrow{b}$ とすると、

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

A を係数行列といい、A と $\overrightarrow{b}$ を並べた (2) を拡大係数行列といいます。

また、消去法より得られた (2) の係数行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \tag{3}$$

です。この行列のように対角成分より下の成分がすべて 0 である行列を**上三角行列**と呼びます。

ガウスの消去法のように、行列も以下のように操作を行うことができます。

(1) 1 つの方程式に 0 でない数を掛ける

(2) 1 つの方程式に他の方程式をかけたものを足したり引いたりする

(3) 2 つの方程式を入れ替える

これらの操作を、行基本変形と言います。

つまり、消去法は、拡大係数行列に対し**行基本変形**を行い、上三角行列にする連立一

次方程式の解法ということになります。

(3) 時点での拡大係数行列を表すと、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 27 & 108 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} ④ \\ ⑤ \\ ⑥ \end{array}$$

です。これに対しさらに行基本変形を行い係数行列を単位行列とする動作を考えます。

⑥ $\div 27$より、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} ④ \\ ⑤ \\ ⑥' \end{array}$$

⑤－⑥’$\times 2$より、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} ④ \\ ⑤' \\ ⑥' \end{array}$$

④－⑤’＋⑥’ $\times 3$ より、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} ④' \\ ⑤' \\ ⑥' \end{array}$$

これで、係数行列が単位行列となり、$x = 1,\ y = 2,\ z = 4$ が導かれました。

このように、行基本変形を行い、係数行列を単位行列とする開放を、**ガウス・ジョルダンの消去法** (または**掃き出し法**) といいます。

7.2 掃き出し法を用いた逆行列の導出

行基本変形を用いて逆行列を求めることができます。

実際に以下の

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

ここで、A の横に E を並べた行列を考えると、

となります。

この行列について、行基本変形を行い、左側を単位行列にします。

すると、

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

となります。

この左辺を B と置き、A と掛け合わせると、

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 8 + 5 \times (-3) & 2 \times (-5) + 5 \times 2 \\ 3 \times 8 + 8 \times (-3) & 3 \times (-5) + 8 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と、単位行列となる。

$AB = 1$ より、

$$B = A^{-1}$$

である。

よって、

A の逆行列は、

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

となります。

ex. 8. 線形変換 (高校数学範囲外) 代数から幾何へ

8.1 定義

平面上の点を別の点に移す変換

$$f:(x,\ y)\to(x',\ y')$$

を、変換といいます。

ここで、が定数項のないの 1 次式

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

で表されるとき、この変換を**線形変換**といいます。

これを行列で表すと、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となります。

このことから、線形変換は、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ただし、} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表現します。

ここで、A を線形変換の表す行列という。

線形変換を、イラストを使って考えます。

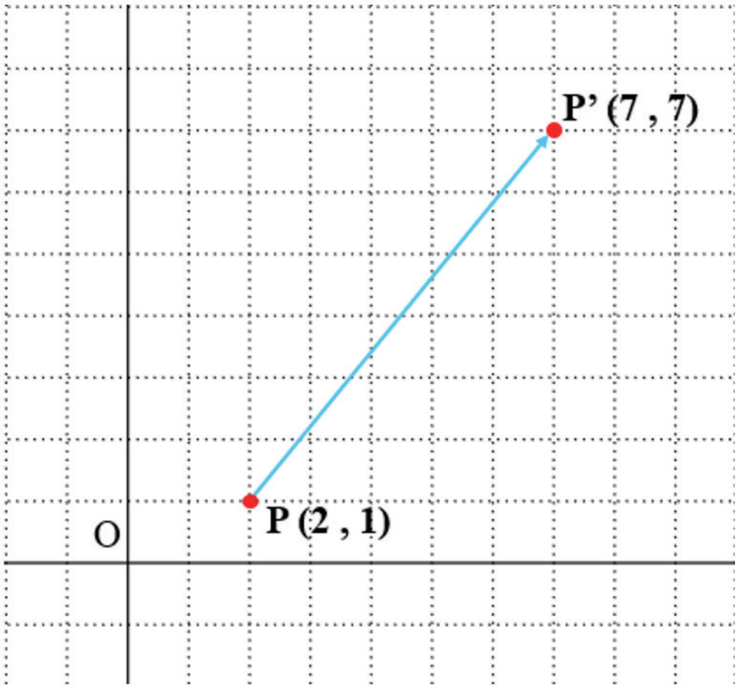
$P = (2,\ 1)$ について考えます。

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ とすると、線形変換後の点 P' は、

$$P' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \quad ①$$

より、$P' = (7,\ 7)$ となります。

これを図で表すと、

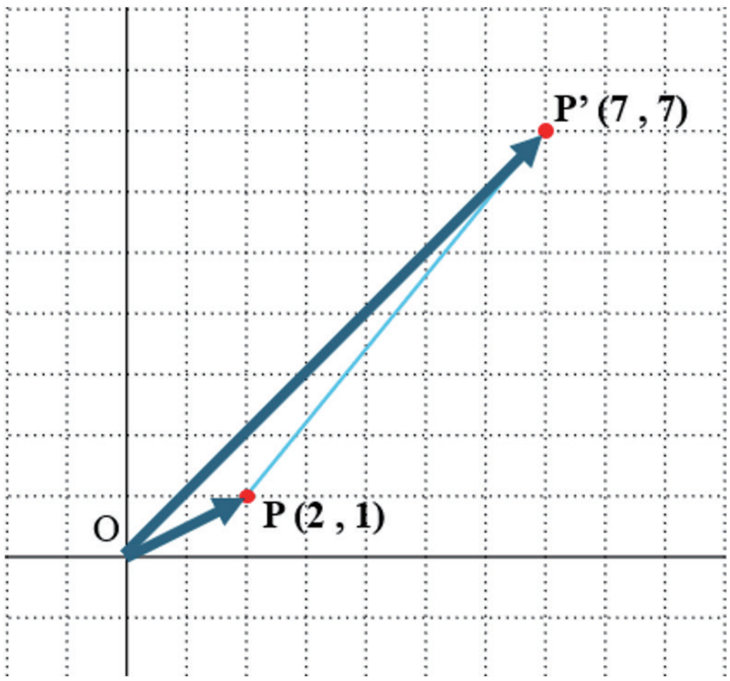


このように、線形変換で $(2,\ 1)$ から $(7,\ 7)$ に移されました。

点 P , P' の一ベクトルをそれぞれ

$$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{p'}=\overrightarrow{OP'}=\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}$$

で表すと、線形変換はベクトルをベクトルに対応させる変換であると言えます。

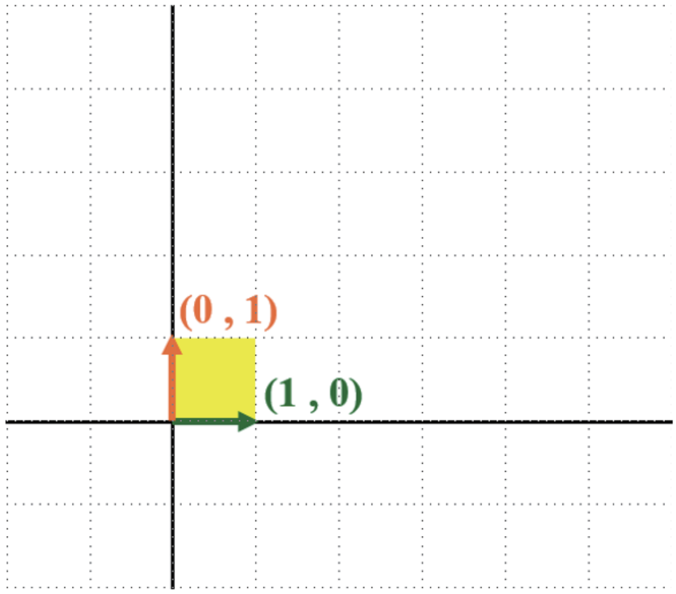


これを

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ または、} \overrightarrow{p'} = f\left(\overrightarrow{p}\right)$$

と表します。この $\overrightarrow{p'}$ を f による $\overrightarrow{p}$ の像といいます。

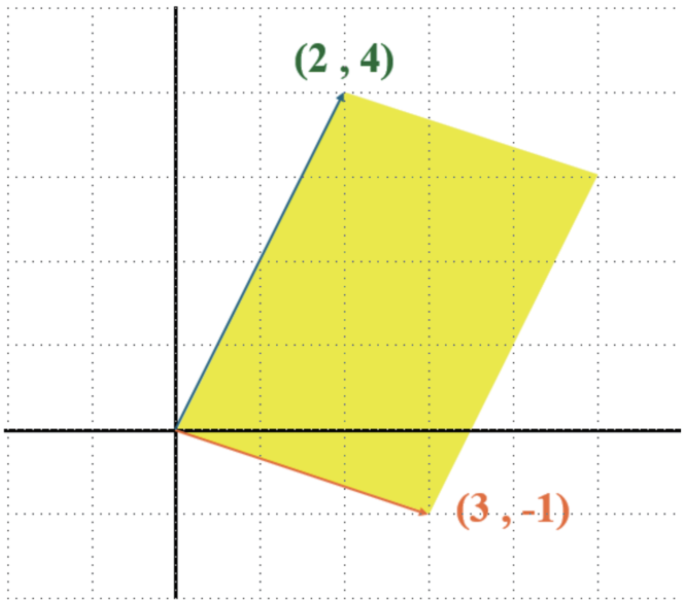
次に、$\vec{a} = (1,\ 0)$ と $\vec{b} = (0,\ 1)$ に囲まれた範囲を考えます。



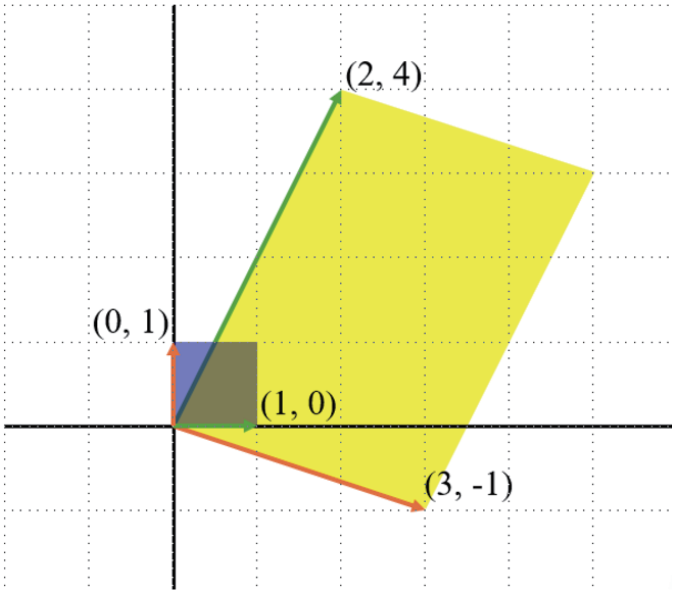
これを $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおき、A で線形変換すると、

$$K' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

これを図で表すと、



このような形となります。



ここまでの内容を、文字式で表します。

$P=(x,y)$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると、

$$P' = AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{a}=(m,\ o)$, $\overrightarrow{b}=(n,\ p)$ とすると、

$$\overrightarrow{a} \text{ と } \overrightarrow{b} \text{ に囲まれる範囲 } K = \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix}$$

$$K' = AK = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\times m+b\times o & a\times n+b\times p \\ c\times m+d\times o & c\times n+d\times p \end{pmatrix}$$

8.2 固有値と固有ベクトル

線形変換 f について、

$$f\left(\overrightarrow{x}\right) \parallel \overrightarrow{x} \text{ すなわち } f\left(\overrightarrow{x}\right) = \lambda\overrightarrow{x} \to A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$$

(λ は定数、A は線形変換 f の表す正方行列)

となるベクトル x が必ず存在する。

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ で表されるとき、f がどのような変換なのかを考える。$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は、$y = \dfrac{1}{2}x$ に平行であるベクトルである。これを変換すると、

$$A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。つまり、$A\overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{x}$ である。

ここで $y = \dfrac{1}{2}x$ に平行な任意のベクトルを x' とすると、$\overrightarrow{x'} = m\overrightarrow{x}$ (m は実数) より、

$$A\overrightarrow{x'} = A\left(m\overrightarrow{x}\right) = mA\overrightarrow{x} = m\left(3\overrightarrow{x}\right) = 3m\overrightarrow{x} = 3\overrightarrow{x'}$$

したがって、$\overrightarrow{x'}$ も 3 倍されます。

このことから、変換 f は、$y = \dfrac{1}{2}x$ に平行な任意のベクトルを 3 倍するものになります。

このように、$f\left(\overrightarrow{x}\right) = \lambda\overrightarrow{x}$ が成り立つとき、この λ を**固有値**、$\overrightarrow{x}$ を**固有ベクトル**といいます。また、固有値と固有ベクトルは、f の表す正方行列 A の次数だけ存在します。

では、$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ のもう一つの固有ベクトルと固有値を求めましょう。

正方行列 A について、

$$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$$

$$A\overrightarrow{x} = \lambda E\overrightarrow{x} \quad (\,E: \text{単位行列}\,)$$

$$(A - \lambda E)\overrightarrow{x} = 0$$

ここで、$\overrightarrow{x} \neq 0$ より、

$$|A-\lambda E|=0$$
$$(\,|\lambda E-A|=0\,)$$

とすることで、λ が求まります。

実際に計算してみましょう。

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix}4 & -2\\3 & -3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right| &= \left|\begin{pmatrix}4 & -2\\3 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}\right|\\ &= \begin{vmatrix}4-\lambda & -2\\3 & -3-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (4-\lambda)(-3-\lambda)-(-2\times 3)\\ &= \left(-12-\lambda+\lambda^2\right)-(-6)\\ &= \lambda^2-\lambda-6\\ &= (\lambda-3)(\lambda+2)\\ &= 0\end{aligned}$$

よって、$\lambda = 3.\ -2$ なので、固有値が 3 と−2 であることが求まります。

次に、固有ベクトルを求めていきます。

$\lambda=-2$ を $(A-\lambda E)\overrightarrow{x}=0$ に代入します。

$$\left(\begin{pmatrix}4 & -2\\3 & -3\end{pmatrix}-(-2)\times\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}4+2 & -2\\3 & -3+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}6 & -2\\3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

$$\therefore 6x-2y=0$$

$$3x-y=0$$

となります。

①より、

$$3x = y$$

$$x : y = 1 : 3$$

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

行列 A で変換しても、回転せず、単に長さだけが変わるような引き伸ばしのみを行う。

固有ベクトルとは、2 次元でいうと、方向が変わらず長さだけが変わる方向のベクトル。固有値とは、その方向のベクトルで変換前と変換後のベクトルの長さの比と言えます。

8.3 対角化

正方行列 A , B に対して、

$$P^{-1}AP = B$$
$$(A = PBP^{-1})$$

となる正則行列 P が存在するとき、A と B は**相似**であるといいます。

B が対角行列であるとき、A は P で**対角化可能**であるという。

なお、すべての正方行列が対角化できるわけではない。

本稿では、重解 (固有値が重複する事) がない場合ンついての対角化について説明する。

実際に、$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ を対角化しましょう。

まず、P を求めます。

A の固有ベクトルは、先ほど求めたとおり、

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

です。

ここで、

$$P = \begin{pmatrix} \overrightarrow{x_1} \, \overrightarrow{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

となります。P の逆行列は

$$P^{-1} = \frac{1}{2 \times 3 - 1 \times 1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となります。

$P^{-1}AP$ を計算します。

$$\begin{aligned} B = P^{-1}AP &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、A を対角化した B が求まります。

では、この対角化した行列は何に使うのでしょうか？

A のべき乗を求めることが楽になります。ここで A がP で対角化可能であるとすると、

$$A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n$$

です。これを展開すると、

$$\begin{aligned} A^n &= \left(PBP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right)\dots\left(PBP^{-1}\right) \\ &= PBP^{-1}PBP^{-1}PBP^{-1}\dots PBP^{-1} \end{aligned}$$

となります。

ここで、$P^{-1}P = E$ (E は単位行列) より、

$$\begin{aligned} A^n &= PBEBE\dots EBP^{-1} \\ &= PB^nP^{-1} \end{aligned}$$

となります。

ここで、B は対角行列なので、$B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ と置くと、

$$B^n = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} e^n & 0 \\ 0 & f^n \end{pmatrix}$$

です。

以上より、対角化可能な行列のべき乗の計算は、対角化した行列を用いると簡単となります。

チャレンジ！植木算

直線状や円状に等間隔に木を植えていくような問題を、植木算といいます。次の二問について、実際に図を書いて考えてみましょう。

(1) 長さが 10m の道に沿って木を植えるとき、端から初めて 2m おきに植えます。木を何本植えればよいですか？

(2) 外周 24m の円形、三角形、四角形の池の周りに、2m おきに街灯を立てます。街灯はそれぞれ何本必要ですか？

チャレンジ！つるかめ算

足が 3 本のイスと、4 本のテーブルが合わせて 50 個あります。足の数の合計が 171 本の時、イスとテーブルはそれぞれ何個ずつありますか？また、25 人の子供がいるとき、全員分のイスとテーブルはありますか？

チャレンジ！行列

$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ **について、以下の問いに答えよ。**

(1) 固有値と固有ベクトルを求めよ。

(2) 対角化行列を求め、対角化せよ。

8. パスカルの三角形

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
⋮

上のように数字を並べたものを、「パスカルの三角形」と呼びます。ここでは、その「パスカルの三角形」が持つ面白い法則について考えていきましょう！

(1)　迷路問題

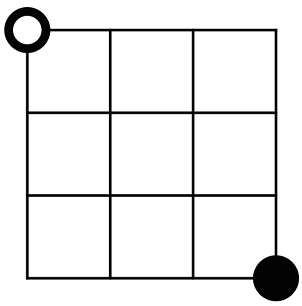


図 8.1　迷路

図 8.1 に示す迷路において、〇から●まで最短で行くルートは何通りありますか？

解き方

パスカルの三角形を使って考える。

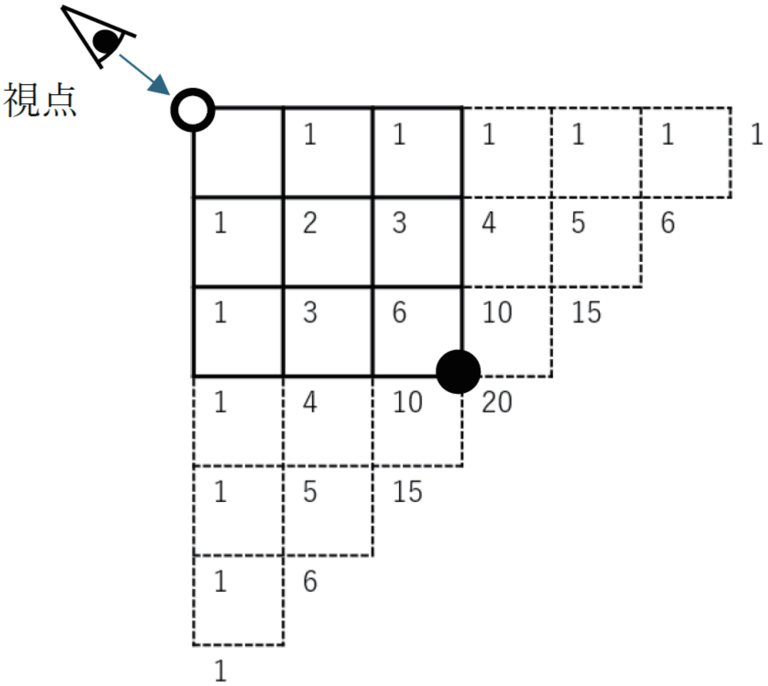


図 8.2　迷路にパスカルの三角形を重ねたもの

図 8.2 に示すように図 8.1 の迷路の交点パスカルの三角形を重ねると、それぞれの交点に対応する数字がその交点にたどり着くための道順の通りの数になります。

今回の問題では、黒丸に対応した数字は 20 であるので、20 通りとなります。

(2)　二項定理（にこうていり）

について考えます。$n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots$ と計算すると、以下のようになります。

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

それぞれの係数（けいすう）に注目すると、何かに気づきませんか？

係数を抜き出したものが以下になります。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

パスカルの三角形で現れる数列がそのまま係数になっているのです。

この $(a+b)^n$ を展開（てんかい）した際に出てくる各係数のことを、二項係数といいます。

この二項係数は、組み合わせを表す C (コンビネーション) を使って表すことができます。

$$
(a+b)^1 = {}_1C_0 a^1 b^0 + {}_1C_1 a^0 b^1 \ (= a+b)
$$
$$
(a+b)^2 = {}_2C_0 a^2 b^0 + {}_2C_1 a^1 b^1 + {}_2C_2 a^0 b^2 \left(= a^2 + 2ab + b^2\right)
$$
$$
\vdots
$$
$$
(a+b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}_nC_n a^{n-n} b^n
$$

つまり、パスカルの三角形において上から n 段目の左から r 番目の数字は、

$$
{}_nC_r (n \geqq r)
$$

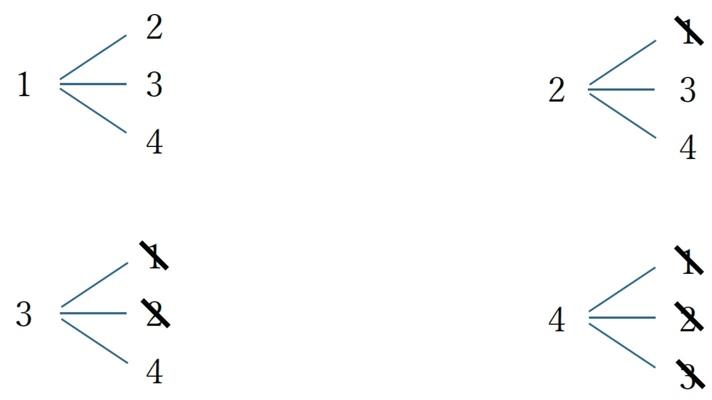
となります。

組み合わせと順列について (高校生範囲)

1. 組み合わせ

1～4 までの数字が書かれたカードが一枚ずつあり、2 枚を選ぶ何通りとき、選び方はあるでしょうか？

図を書いて考えると、



の合計 6 通りです。

つるかめ算の時と同様にこのようにすべて書き出せば簡単に答えを求めることができますが、数字が大きくなるとこの方法では大変です。

そこで用いるのが「 コンビネーション 」です。

前述の通り、コンビネーションとは C であらわされ、${}_nC_r$と書かれていれば、

“1 ～ n までの数字から、ランダムに r 個の数字を選ぶ時の組み合せ” という意味です。

計算方法は、

$$ {}_nC_r = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} $$

となります。

${}_nC_0$ は a と b が一つずつ入った箱を n 個並べて、すべての箱からどちらか一つを選んで取り出していくとき、b を一度も選ばない組み合わせ→ 0 通り

${}_nC_1$ は a と b が一つずつ入った箱を n 個並べて、すべての箱からどちらか一つを選んで取り出していくとき、b を 1 度だけ選ぶ組み合わせ→ n 通り

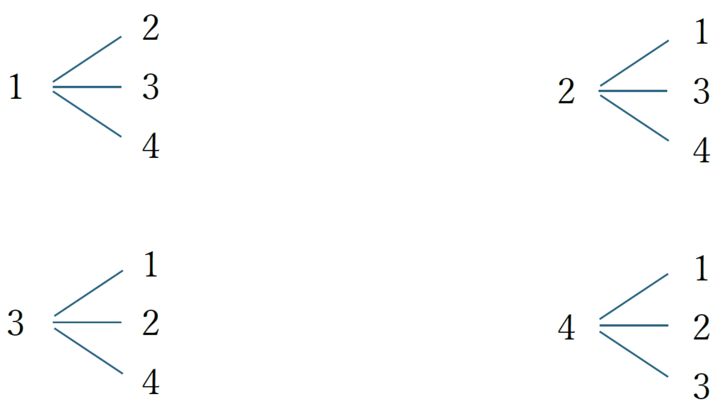
${}_nC_2$ は a と b が一つずつ入った箱を n 個並べて、すべての箱からどちらか一つを選んで取り出していくとき、b を 2 度だけ選ぶ組み合わせ→$\dfrac{n!}{2!\,(n-2)!}$ 通り

となります。

2. 順列

1～4 までの数字が書かれたカードが一枚ずつあり、一枚を選んで十の位に、残りの三枚の中からもう一枚を選んで一の位にする場合、できる二桁の数字は何通りあるでしょうか？

図を書いて考えると、



の合計 12 通りです。

つるかめ算の時と同様にこのようにすべて書き出せば簡単に答えを求めることができますが、数字が大きくなるとこの方法では大変です。そこで用いるのが、順列という考え方です。

n 種類から r 個を並べる順列の計算は、${}_nP_r$ で表します。計算方法は、

$${}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

となります。

先ほどの例題であれば、

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = \frac{4!}{2!} = 12$$

となり、12 通りと求まります。

同様に、

${}_nP_1$ は n 種類のカードから 1 枚並べるときの組み合わせ→ $\dfrac{n!}{(n-1)!} = n$ 通り

${}_nP_2$ は n 種類のカードから 2 枚並べるときの組み合わせ→ $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ 通り

${}_nP_3$ は n 種類のカードから 3 枚並べるときの組み合わせ→ $\dfrac{n!}{(n-3)!}$ 通り

のように考えることができます。

チャレンジ！多項定理

次の式について、以下の問いに答えなさい。

$$(a+b)^n$$

(1) $n=5$ のときの、の係数を求めなさい。

(2) $n=100$ のときの、の係数を求めなさい。

チャレンジ！組み合わせと順列

40 人のクラスについて、以下の問いについて答えなさい。

(1) クラス委員を二人選ぶ時の組み合わせは、何通りありますか？

(2) リレーの代表を四人選び、第一走者から第四走者まで決める際の選び方

終わりに

本書では、数とは何か？という単純な問いから始まり、最後には高校数学の内容である線形代数や順列・組み合わせについて述べました。

従来の学年・分野ごとに区切られた内容ではなく、関連する事柄をつなげて記述しているので、初めて高校数学に触れる人にはわかり易いと、過去に同じような内容を学んだ人はバラバラに学んだ単元のつながりを感じていただけたならうれしいです。

本テキストは、

[1] **高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説 数学編 理数編**

[2] **高等学校数学科教材「 行列入門 」**

をもとに作成しています。

また、一部の図表に関して、以下を参考に作成しています。

[3] @kenmatsu4(まつ けん), “**【数学】固有値・固有ベクトルとは何かを可視化してみる**”, Qiita, 2015/05/28, https://qiita.com/kenmatsu4/items/2a8573e3c878fc2da306, (閲覧日 2026/05/18)

[4] 遠田祐人 , “固有ベクトル・固有値とは何か？図と具体例から分かるその意味と使い道”, 2019/09/09, https://atarimae.biz/archives/24166, (閲覧日 2026/05/18)

おおわだ あきくに

大和田 昭邦

株式会社 DynaxT 代表取締役 社長

AI・教育・IoT・医療物流など研究開発に力を入れ、
「さぬきから世界へ」発信する技術とサービスの創成に
取り組んでいる。

MathPub をはじめとする教育事業や本書の制作を通じて、
次世代を担う子供達の論理的思考力と創造力の育み、
未来を切り拓く人材育成への貢献を目指している。

略歴

1964 年	香川県立高松高等学校 卒業
1969 年	東京大学 工学部 計数工学科 卒業
1969 年	東京芝浦電気株式会社 ｼｽﾃﾑ開発ﾌﾟﾛｼﾞｪｸﾄ管理
1974 年	川大学商業短期大学部 講師 香川大学統計学 修士 取得
1976 年	高松高等予備校 副校長
1977 年	高松高等予備校 理事長
1986 年	株式会社ダイナックス高松 代表取締役社長
2004 年	NPO 法人 ITC かがわ 会長
2002 年	PM 学会四国支部 副支部長
2007 年	香川大学大学院 地域マネジメント研究科 客員教授
2012 年	株式会社 DynaxT 代表取締役社長 (社名変更)